Vorlesung (6), 07. 12. 2021

Nachtrag: • Seit der Antike bekannt: 5 Planeten: Merkur, Venus, Mars, Jupiter, Saturn

• Kepler Idee im Zus.-hg. mit den 5 Platonischen Körpern: Verhältnis der Radien (ungefähre Kreisbahnen der 6 Planeten angenommen) benachbarter Planeten ist das Verhältnis der Radien von Um- und Innkugel der Platonischen Körper (stimmt ungefähr)

• Aus Symmetrieannahmen die Bewegung der Planeten (mit Sonne im Ursprung $x=0$) geschieht auf Lös.-kurven von

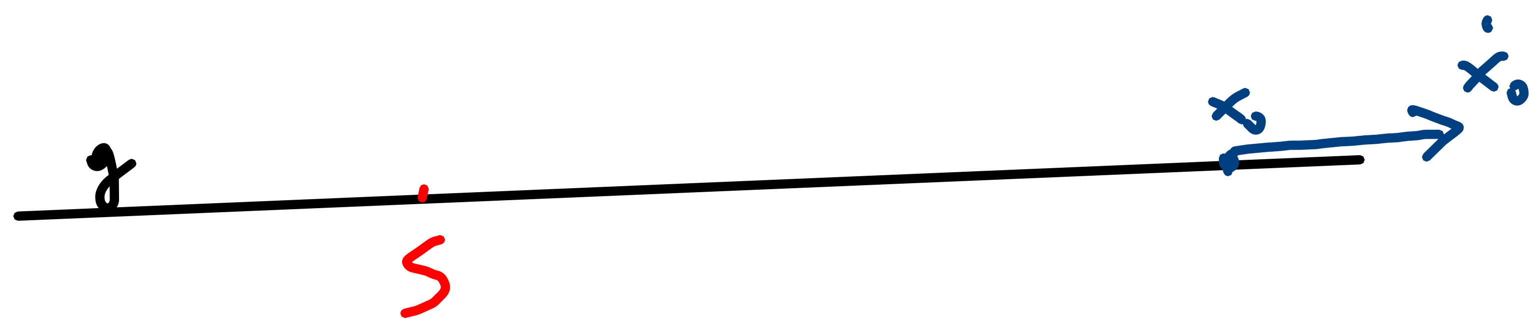
$$\ddot{x} = -\underbrace{\varphi'(\|x\|)}_{\varphi(\|x\|)} \frac{x}{\|x\|} \qquad \text{in } \mathbb{R}^3 - \{0\}$$

- 1. Integrale:

(i) Energie: $H(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}\|\dot{x}\|^2 + \varphi(\|x\|)$

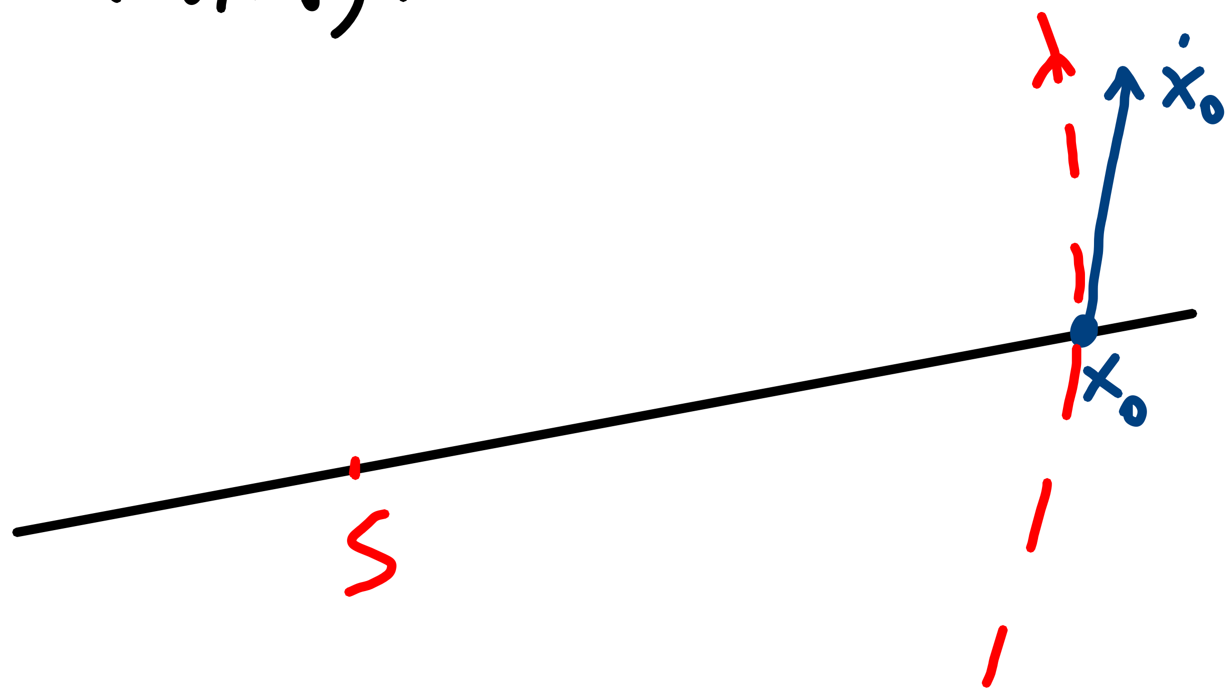
(ii) Drehimpuls: $L(x,\dot{x}) = x \times \dot{x}$

Korollar. (a) Ist die Anf.-bedingung $(x_0,\dot{x}_0) \in P = \mathbb{R}^3\setminus\{0\} \times \mathbb{R}^3$ lin. abh., so bewegt sich der Planet auf der Geraden $g = \mathbb{R}x_0$.



(b) Ist $(x_0, \dot{x}_0)$ lin. unabh., so bewegt sich der Planet auf der Ebene

$$E = \mathrm{span}(x_0, \dot{x}_0).$$



<u>Kommentar</u>. Alle Planetenbahnen sind also eben (siehe 1. Teil des 1. Keplerschen Gesetzes). Genau im Fall $L = x_0 \times \dot{x}_0 = 0$, ist die Bahn auf einer Geraden, sonst echt in einer Ebene (<u>Eklipse</u> bei Sonne-Erde).

Beweis des Korollars.

(a) Wegen der Invarianz unter $SO(3)$ kann $x_0, \dot{x}_0 \in \mathbb{R}e_1$ annehmen. Betrachte dann die ODE

$$\ddot{r} = -\varphi(r) \quad , \; r(0) = r_0 \qquad (x_0 = (r_0, 0, 0)).$$

auf $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Die Lösungen $t \mapsto r(t)$ führen dann zu Lösungen $t \mapsto x(t)$ von

$$(*) \qquad \ddot{x} = -\varphi(\|x\|) \frac{x}{\|x\|} \quad \text{auf } \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$$

vermöge $x(t) = (r(t), 0, 0)$.

(b) Sei o.E. $x_0, \dot{x}_0 \in \operatorname{span}(e_1, e_2)$. Betrachte dann

(***) $$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}' = -\varphi\left(\left\|\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right\|\right)\cdot\frac{(x_1,x_2)}{\|(x_1,x_2)\|}$$

$(\dot{x}_1)_0, (\dot{x}_2)_0$

auf $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ mit Anf.-bed $((x_1)_0,(x_2)_0)$, wenn $x_0=((x_1)_0,(x_2)_0,0)$ und $\dot{x}_0=((\dot{x}_0)_1,(\dot{x}_0)_2,0)$. Die Lösungen von (***) führen mit $t\mapsto(x_1(t),x_2(t),0)$ zu den Lösungen von (*) mit x_3-Komponente gleich Null.

$\square$

<u>Kommentar.</u> (a) Die Konstanz der Richtung des Drehimpulses L führt also zu einer Dimensionsreduktion von 6 auf 4. (Beachte: $L=(L_1,L_2,L_3)$ sind eigentlich 3 erste Integrale.) Der Betrag von L wird ein 1. Integral für das ebene Problem bleiben.

(b) Im Fall $L=0$ bekommt man das System

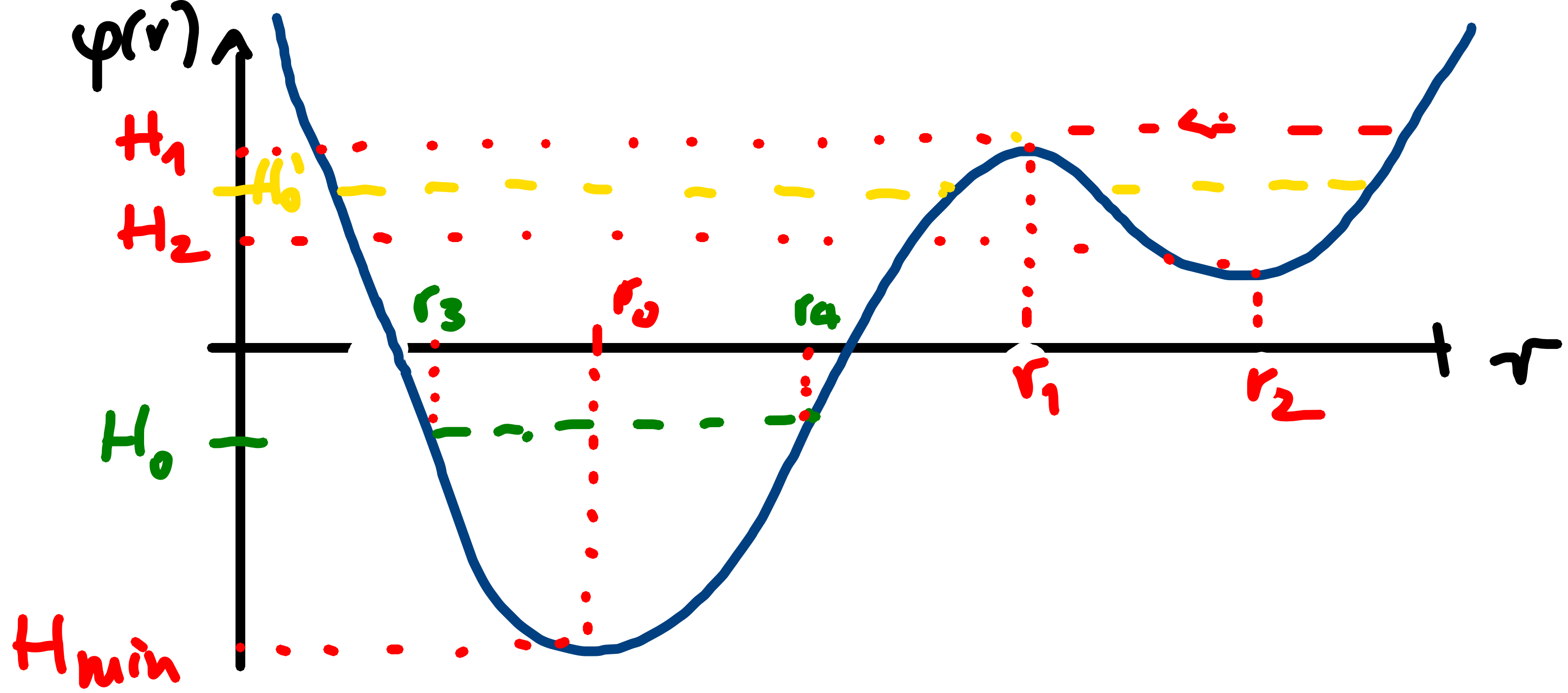
$$\ddot{r} = -\psi(r) = -\varphi'(r)$$

mit 1. Integral

$$H(r,\dot{r}) = \frac{1}{2}\dot{r}^2 + \varphi(r),$$

welches wir komplett verstehen und sogar explizit integrieren können.

(2.4) Der Fall $L=0$. Wir wissen, dass $H(r,\dot r) = \frac{1}{2}\dot r^2 + \varphi(r)$ ein 1. Integral ist. Sieht der Graph von φ etwa qualitativ so aus?



so gibt qualitativ folgende Bahnen

(i) Ist $H_0 := H(r_0, \dot{r}_0) < H_{min}$, so gibt es keine solche Bahn, da $\frac{1}{2}\dot{r}^2 \geq 0$.

(ii) Ist $H_0 = H_{min}$ gibt es nur die (stabile) Gleichgewichtslage

(iii) Ist $H_{min} < H_0 < H_2$ pendelt die Bahn zwischen r_3 und r_4.

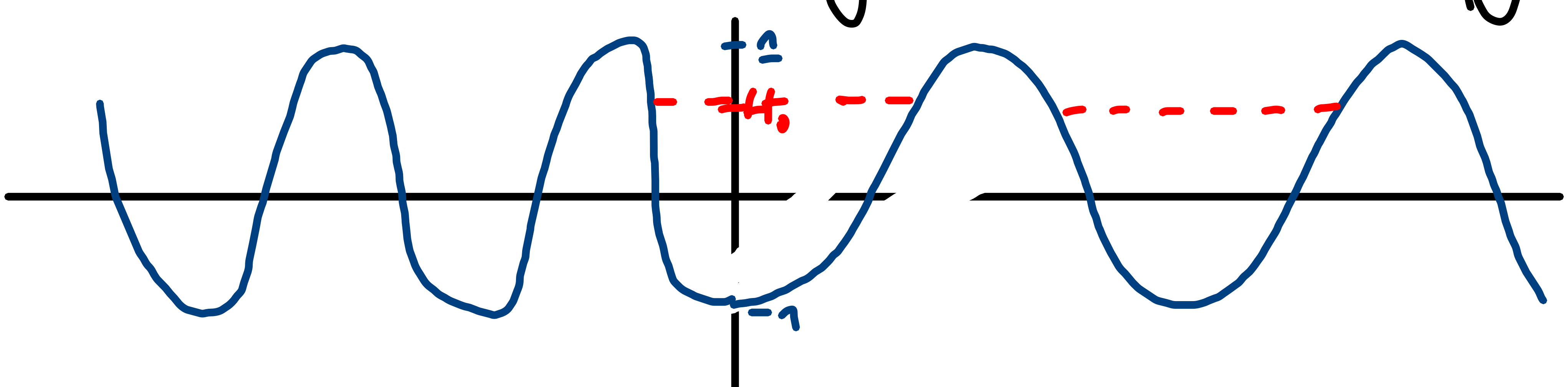
(iv) Für $H_0 = H_1$ läuft $t \mapsto r(t)$ in die (instabile) Gl.-lage hinein

(v) Für $H_0 > H_1$ pendelt $t \mapsto r(t)$ wieder zwischen zwei Werten hin und her.

Beispiel. (a) Das mathematische Pendel. Hier war

$$\varphi(r) = -\cos(r) \quad (\text{und } G = \mathbb{R})$$

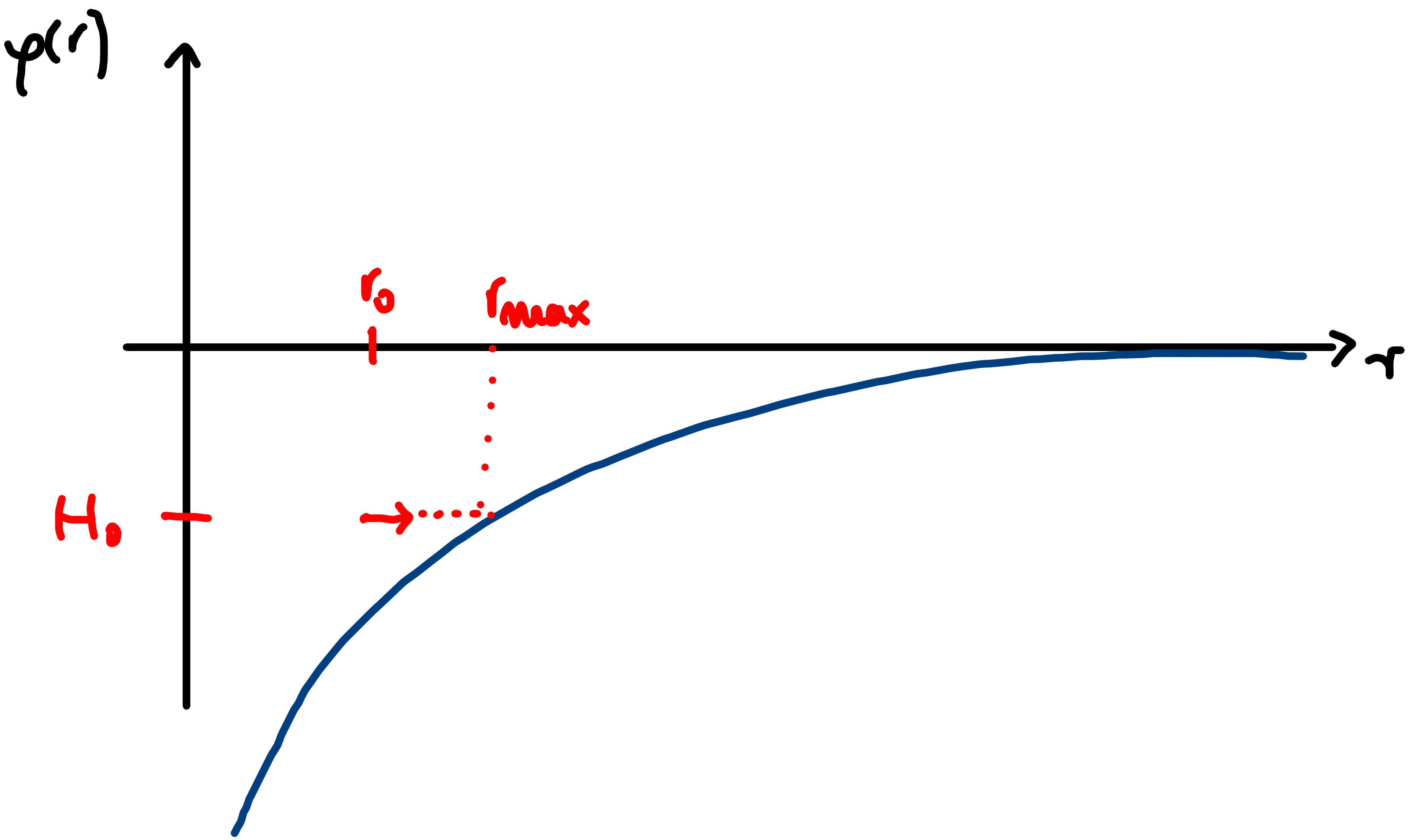
und wir hatten das Phasendiagramm schon aufgestellt,



(b) Im Kepler-Problem wird sich $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ als

$$\varphi(r) = -\frac{1}{r}$$

herausstellen (also $\psi(r) = \varphi'(r) = \frac{1}{r^2}$):



$\overline{\text{Fü}}$

(i) $H_0 < 0$ und $\dot{r}_0 > 0$ entfernt sich der Planet also zunächst von der Sonne, bis er $r_{max} = r(t_0)$ erreicht. Dort ist $\dot{r}(t_0) = 0$ und dann kehrt er zurück und fällt schließlich (in endlicher Zeit) in die Sonne. Im Fall $\dot{r}_0 \leq 0$ fällt er sofort in die Sonne.

(ii) $H_0 = 0$ und $\dot{r}_0 \leq 0$: ... fällt er in die Sonne
$\dot{r}_0 > 0$: erreicht „gerade so eben" ∞ mit $t_+(r_0, \dot{r}_0) = \infty$

(iii) $H_0 > 0$: $\dot{r}_0 \leq 0$: fällt in die Sonne
$\dot{r}_0 \geq 0$: erreicht (in unendlicher Zeit) ∞.

(2.5) Der Fall $L \neq 0$.

Wir betrachten o.E. den Fall, dass

$$E = \mathrm{span}(x_0, \dot{x}_0) = \mathbb{R}^2$$

und damit $L = \ell \cdot e_3$ mit

$$\ell(x,\dot{x}) = x_1 \dot{x}_2 - x_2 \dot{x}_1 \qquad (L)$$

Der Phasenraum von

$$\ddot{x} = -\varphi(\|x\|) \frac{x}{\|x\|} \quad \text{auf } \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \qquad (N)$$

ist also nun 4-dimensional und wir haben neben (L) noch das Energieintegral

$$H(x,\dot{x}) = \frac{1}{2}\|\dot{x}\|^2 + \varphi(\|x\|)$$

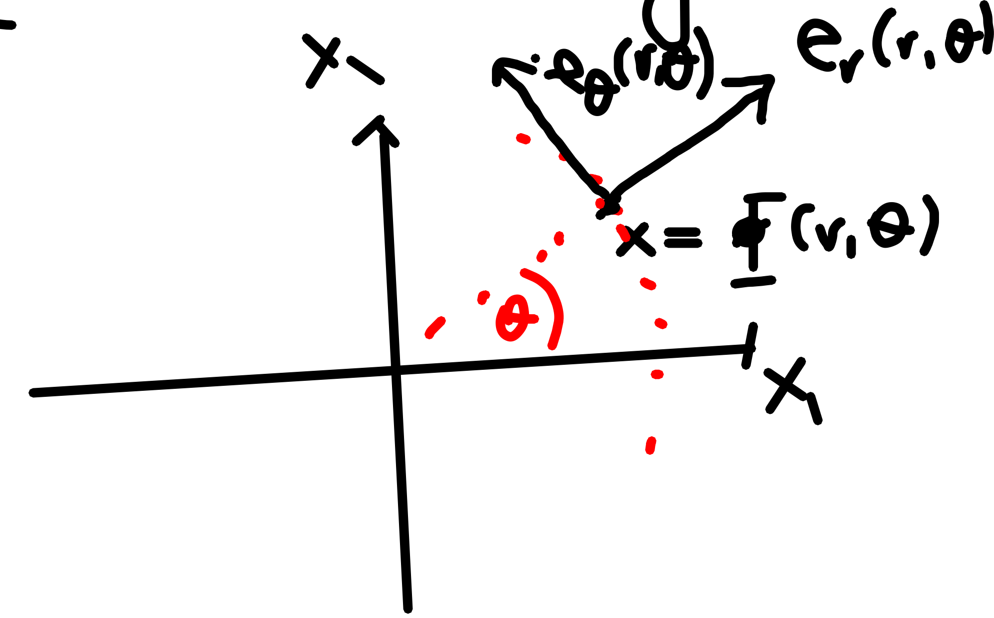
Naheliegend: Transformiere auf Polarkoordinaten, d.h.:
betrachte

$$\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

Um alle Winkel zu erfassen, nehmen wir $\Phi: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ an. Dann ist Φ immerhin noch eine Immersion, d.h. $D\Phi(r,\theta)$ hat überall vollen Rang, ist sogar eine Überlagerung. Wir können also das Vektorfeld und damit die Bahnen nach $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ liften, d.h. zu $\alpha: I \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gibt es stets $\beta: I \to \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ mit $\Phi \circ \beta = \alpha$,

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \arrow[d, "\Phi"] \\ I \arrow[ur, dashed, "\beta"] \arrow[r, "\alpha"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3ex, "\#"] & \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \end{tikzcd}$$

Wollen nun sehen, welche Dgl. β erfüllt (also wie das geliftete Vektorfeld aussieht): Seien dazu



$$e_r(r,\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$$
$$e_\theta(r,\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta)$$

$\rightsquigarrow$ (e_r, e_θ) ist also ON-Basis. Ist nun $\beta: t \longmapsto (r(t), \theta(t))$ („das begleitende 2-Bein"), so gilt:

$$\dot{e}_r(r,\theta) = (-\sin\theta\cdot\dot\theta,\ \cos\theta\cdot\dot\theta) = \dot\theta e_\theta$$

$$\dot{e}_\theta(r,\theta) = (-\cos\theta\cdot\dot\theta,\ -\sin\theta\cdot\dot\theta) = -\dot\theta e_r.$$

Ableitung von $\alpha : t \mapsto x(t)$ liefert wegen $x = re_r$

$$\dot x = \dot r e_r + r\dot e_r = \dot r e_r + r\dot\theta e_\theta,$$

insbesondere

$$\|\dot x\|^2 = \dot r^2 + (r\dot\theta)^2.$$

Weiter:

$$\begin{aligned}\ddot x &= \ddot r e_r + \dot r \dot e_r + \dot r\dot\theta e_\theta + r\ddot\theta e_\theta + r\dot\theta\dot e_\theta \\ &= (\ddot r - r\dot\theta^2)e_r + (2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta)e_\theta.\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$G(x) = -\varphi'(\|x\|)\frac{x}{\|x\|} = -\varphi'(r)\, e_r$$

Also durch Vergleich der Komponenten

(a) $\ddot{r} = r\dot{\theta}^2 - \varphi'(r)$

(b) $\ddot{\theta} = -\frac{2\dot{r}}{r}\dot{\theta}$

Transformation der beiden 1. Integrale ergibt:

$$H = \frac{1}{2}\|\dot{x}\|^2 + \varphi(\|x\|) = \frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \varphi(r) = \left(\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \varphi(r)\right) + \frac{1}{2}r^2\dot{\theta}^2$$

Gleichung (b) drückt nur die Invarianz von ℓ aus, denn:

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dt}(\underbrace{r^2\dot\theta}_{=\ell}) = \frac{2r\dot r}{r^2}\dot\theta + \ddot\theta = \ddot\theta + \frac{2\dot r}{r}\dot\theta$$

denn:

$$\begin{aligned}\ell &= x_1\dot x_2 - x_2\dot x_1\\ &= r\cdot\cos\theta\cdot(r\cdot\sin\theta)^{\cdot} - r\sin\theta\cdot(r\cdot\cos\theta)^{\cdot}\\ &= r\cdot\cos\theta\cdot(\dot r\sin\theta + r\cos\theta\cdot\dot\theta)\\ &\qquad - r\sin\theta(\dot r\cos\theta - r\sin\theta\cdot\dot\theta) = r^2\dot\theta\end{aligned}$$

Hat man $t\mapsto r(t)$ bestimmt, folgt $t\mapsto\theta(t)$ aus der Quadratur von $\dot\theta = \ell/r^2$, also

$$\theta(t) = \ell\int_0^t \frac{ds}{r^2(s)}.$$